

### Model 3

Contestau de manera clara i raonada quatre qüestions qualssevol, escollides d'entre les vuit proposades.

Disposau de 90 minuts. Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total de punts obtinguts entre 4. Només es tindran en compte les respostes clarament justificades i raonades usant llenguatge matemàtic o no matemàtic, segons correspongui. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Es permet utilitzar calculadora científica bàsica. No es permet l'ús de calculadores gràfiques ni programables, ni de dispositius amb accés a Internet o aparells que puguin transmetre o emmagatzemar informació.

1. Donada la matriu

$$A = \begin{pmatrix} a^2 & a & a \\ a & a^2 & 1 \\ a & 1 & a^2 \end{pmatrix},$$

- (a) Estudia el rang de la matriu  $A$  segons els valors de  $a$ . (6 punts)
- (b) Determina per a quins valors de  $a$  la matriu  $A$  és invertible. (1 punt)
- (c) Per al valor de  $a = -1$  calcula la solució,  $X$ , de l'equació matricial

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3 \text{ punts})$$

2. Sigui la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Calcula  $A^t$ ,  $A^2$  i  $A^{-1}$ , on  $A^t$  és la matriu transposada i  $A^{-1}$  la inversa. (3 punts)
- (b) Sigui  $I$  la matriu identitat. Resol  $X$  de l'equació

$$A^2 - 2AX + I = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}. \quad (3 \text{ punts})$$

- (c) Calcula totes les matrius  $B$  per a les quals es té que

$$A \cdot B = B \cdot A^t \quad (4 \text{ punts})$$

3. Considera la funció

$$f(x) = \frac{1}{x^4}.$$

- (a) Representa-la gràficament. (7 punts)
- (b) Comprova que  $f(2) = f(-2)$ . (1 punt)
- (c) Comprova que no existeix  $c \in [-2, 2]$  tal que  $f'(c) = 0$ . (1 punt)
- (d) Hi ha una contradicció amb la conclusió del teorema de Rolle? (1 punt)

4. Donada la funció

$$f(x) = \frac{-x}{4 - x^2}.$$

- (a) Calcula una primitiva de  $f(x)$ . (5 punts)
- (b) Calcula l'àrea delimitada per la gràfica de  $f(x)$ , les rectes  $x = \sqrt{5}$  i  $x = \sqrt{6}$ , i l'eix  $X$ . (5 punts)

5. Considera els punts,

$$A = (5, a, 7), \quad B = (3, -1, 7), \quad C = (6, 5, 4).$$

- (a) Determina el valor del paràmetre  $a$  per al qual els punts  $A$ ,  $B$  i  $C$  formen un triangle rectangle, amb l'angle recte al punt  $B$ . (3 punts)
- (b) Per al valor de  $a = -2$ , calcula l'àrea del triangle de vèrtexs  $A$ ,  $B$  i  $C$ . (3 punts)
- (c) Per al valor de  $a = 5$ , calcula l'angle format pels vectors  $\overrightarrow{AB}$  i  $\overrightarrow{AC}$ . (4 punts)

6. Donades les rectes

$$r : \frac{x - m}{-1} = \frac{y + 10}{4} = \frac{z + 3}{1}, \quad s : \begin{cases} x = 1, \\ y = 6 + 4\lambda, \\ z = -1 + 2\lambda. \end{cases}$$

- (a) Calcula el valor de  $m$  per tal que es tallin en un punt, (7 punts)
- (b) Calcula el punt de tall. (3 punts)

7. Es disposa de dues urnes:  $U_1$  i  $U_2$ .

A  $U_1$  hi ha: 4 bolles vermelles i 5 bolles negres.

A  $U_2$  hi ha: 6 bolles vermelles i 3 bolles negres.

A l'atzar es treu una bolla de  $U_1$  i s'introdueix a  $U_2$ , a continuació s'extreu a l'atzar una bolla de  $U_2$ . Calcula la probabilitat que:

- (a) surti una bolla vermella de  $U_2$  (3 punts)
- (b) la bolla extreta de  $U_1$  sigui negra, sabent que la bolla que ha sortit de  $U_2$  també ha estat negra. (3 punts)
- (c) surti almenys una bolla vermella. (4 punts)



8. Una companyia aèria ha observat que els pesos de les maletes d'un determinat trajecte segueixen una distribució normal de mitjana 7,5 kg i desviació típica de 0,4 kg. Calcula la probabilitat que, escollida una maleta a l'atzar:
- (a) pesi menys de 7,2 kg però més de 7 kg. (4 punts)
  - (b) pesi entre 7,8 kg i 8 kg. (3 punts)
  - (c) Si en un trajecte hi ha 90 maletes, quantes maletes és d'esperar que pesin almenys 8,1 kg? (3 punts)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula de la distribució normal  $N(0, 1)$